

POLINOM GYÖKTÉNYEZŐS ALAKJA

ELMÉLET

1. Összetartozó fogalmak (a, b, c valós számok, $a \neq 0$)

$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$	másodfokú függvény	zérushely
$ax^2 + bx + c = 0$	másodfokú egyenlet	megoldás vagy gyök
$ax^2 + bx + c$	másodfokú polinom vagy másodfokú kifejezés	gyök

2. Polinom gyöktényezős alakja

Ha egy másodfokú polinomnak van valós gyöke, akkor szorzattá alakítható.

A szorzattá alakítás módja:

1. Meghatározzuk a polinom gyökeit a megoldóképlet segítségével.
2. Ha egyetlen valós gyöke van (x_1), akkor $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
3. Ha két valós gyöke van (x_1 és x_2), akkor $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Ezt az alakot a polinom **gyöktényezős alakjának** nevezzük.

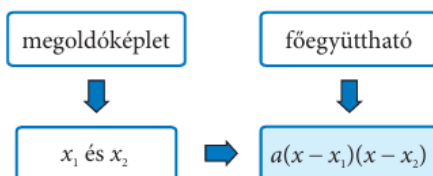
A gyöktényezős alakban szereplő x_1 és x_2 konkrét számok, amelyek a megoldóképlet segítségével kiszámolhatók.

Ha a másodfokú egyenletnek egyetlen valós gyöke van, akkor azt **kétszeres gyöknek** nevezzük. (Ezt az esetet úgy is meg lehet fogalmazni, hogy a két gyök egybeesik, azaz $x_1 = x_2$.)

Egy másodfokú polinomot egyértelműen meghatározza a főegyütthatója és két gyöke. Az $ax^2 + bx + c$ és az $a(x - x_1)(x - x_2)$ kifejezések értéke ugyanakkor lesz nulla, azaz az $x = x_1$ és az $x = x_2$ esetekben. A főegyüttható és a gyökök egyenlőségéből következik, hogy a helyettesítési értékük bármely x esetén egyenlő.

Például

- A $3x^2 - x - 2 = 0$ egyenlet gyökei 1 és $-\frac{2}{3}$, ezért a $3x^2 - x - 2$ polinom gyöktényezős alakja $3(x - 1)(x + \frac{2}{3})$.
- A $3x^2 - x + 2 = 0$ egyenletnek a valós számok halmazában nincs gyöke, ezért a $3x^2 - x + 2$ polinomnak nincs gyöktényezős alakja.
- A $4x^2 - 12x + 9$ polinomnak egy gyöke van, az 1,5; a polinom gyöktényezős alakja $4(x - 1,5)(x - 1,5)$.
Az 1,5-et a $4x^2 - 12x + 9 = 0$ egyenlet **kétszeres gyökének** nevezzük.



FELADATOK

Írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, melynek gyökei 2 és 5.

Megoldás

Az $(x - 5)(x - 2)$ szorzat értéke akkor és csakis akkor nulla, ha $x - 5 = 0$ (ekkor $x = 5$) vagy $x - 2 = 0$ (ami azt jelenti, hogy $x = 2$). Vagyis az $(x - 5)(x - 2) = 0$ egyenlet gyökei: $x_1 = 2$ és $x_2 = 5$.

Beszorozva:

$$(x - 5)(x - 2) = x^2 - 5x - 2x + 10 = x^2 - 7x + 10.$$

Tehát az $x^2 - 7x + 10 = 0$ egy olyan egyenlet, melynek gyökei: 2 és 5.

Azt mondjuk, hogy az $(x - 5)(x - 2)$ szorzat az $x^2 - 7x + 10$ polinom **gyöktényezős alakja**.

1 Ír fel olyan másodfokú egyenletet, melynek valós gyökei a következő számok:
a) 1 és 3 **b)** 2 és -4 **c)** 7 és 8 **d)** -6 és -5

Megoldás:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

a)

- **Gyöktényezős alak:**

$$a = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 3$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 3) = (x - 1) \cdot (x - 3) = 0$$

- **Kifejtve:**

$$x^2 - 3x - x + 3 = 0$$

- **Egyenlet:**

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

b)

- **Gyöktényezős alak:**

$$a = 1$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = -4$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 1(x - 2) \cdot (x - (-4)) = (x - 2) \cdot (x + 4) = 0$$

- **Kifejtve:**

$$x^2 + 4x - 2x - 8 = 0$$

- **Egyenlet:**

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

c)

- **Gyöktényezős alak:**

$$a = 1$$

$$x_1 = 7$$

$$x_2 = 8$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 1(x - 7) \cdot (x - 8) = (x - 7) \cdot (x - 8) = 0$$

- **Kifejtve:**

$$x^2 - 8x - 7x + 56 = 0$$

- **Egyenlet:**

$$x^2 - 15x + 56 = 0$$

d)

- **Gyöktényezős alak:**

$$a = 1$$

$$x_1 = -6$$

$$x_2 = -5$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 1(x - (-6)) \cdot (x - (-5)) = (x + 6) \cdot (x + 5) = 0$$

- **Kifejtve:**

$$x^2 + 5x + 6x + 30 = 0$$

- **Egyenlet:**

$$x^2 + 11x + 30 = 0$$

2. Alakítsd szorzattá a gyöktényezős alak segítségével a másodfokú polinomokat!

a) $x^2 + 12x + 27$

c) $2x^2 - 9x - 5$

b) $x^2 + 3x - 1,75$

d) $5x^2 + 13x + 8$

Megoldás:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0,$$

ahol a : főegyüttható, x_1 és x_2 az egyenlet gyökei

a) $x^2 + 12x + 27$

1. Gyökök keresése (megoldóképlettel):

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-1,75)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-3 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 0,5; x_2 = -3,5$$

2. Szorzattá alakítás:

$$(x - 0,5)(x - (-3,5))$$

3. Eredmény:

$$(x - 0,5)(x + 3,5)$$

b) $2x^2 - 9x - 5$

1. Gyökök keresése (megoldóképlettel):

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-1,75)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-3 \pm 4}{2}$$

$$x_1 = 0,5; x_2 = -3,5$$

2. Szorzattá alakítás:

Ne felejtjük el, hogy x^2 együtthatója a főegyüttható $a = 2$.

$$2 \cdot (x - 5)(x - (-0,5))$$

3. Eredmény:

$$2(x - 5)(x + 0,5)$$

c) $2x^2 - 9x - 5$

1. Gyökök keresése (megoldóképlettel):

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{4} = \frac{9 \pm 11}{4}$$

$$x_1 = 5; x_2 = -0,5$$

2. Szorzattá alakítás:

Ne felejtjük el, hogy x^2 együtthatója a főegyüttható $a = 2$.

$$2 \cdot (x - 5)(x - (-0,5))$$

3. Eredmény:

$$2(x - 5)(x + 0,5)$$

d) $5x^2 + 13x + 8$

1. Gyökök keresése (megoldóképlettel):

$$x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 4 \cdot 5 \cdot 8}}{10} = \frac{-13 \pm \sqrt{9}}{10} = \frac{-13 \pm 3}{10}$$

$$x_1 = -1; x_2 = -1,6$$

2. Szorzattá alakítás:Ne felejtjük el, hogy x^2 együtthatója a főegyüttható $a = 5$.

$$5 \cdot (x - (-1))(x - (-1,6))$$

3. Eredmény:

$$5(x + 1)(x + 1,6)$$

3. A valós számok halmazán értelmezett f másodfokú függvénynek két zérushelye van: -1 és 5 . Főegyütthatója 1 .

- Írd fel a függvény hozzárendelési szabályát!
- Határozd meg a függvény szélsőérték helyét és szélsőértékét!
- Ábrázold a függvény grafikonját!

Megoldás:

a)

Mivel ismerjük a két zérushelyet ($x_1 = -1$ és $x_2 = 5$) és a főegyütthatót ($a = 1$), a gyöktényezős alakot használhatjuk:

$$f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$f(x) = 1 \cdot (x - (-1)) \cdot (x - 5)$$

$$f(x) = (x + 1)(x - 5)$$

Kifejtve (felbontva a zárójeleket):

$$f(x) = x^2 - 5x + x - 5 = x^2 - 4x - 5$$

b)

Egy másodfokú függvény grafikája (parabola) szimmetrikus. A szélsőérték hely (x_v) pontosan a két zérushely számtani közepe (átlaga).

1. Szélsőérték-hely:

Egy másodfokú függvény grafikája (parabola) szimmetrikus. A szélsőérték hely (x_v) pontosan a két zérushely számtani közepe (átlaga).

$$x_v = \frac{-1 + 5}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

2. Szélsőérték:

Ezt úgy kapjuk meg, hogy a szélsőérték helyet behelyettesítjük a függvénybe.

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 - 5 = 4 - 8 - 5 = -9$$

Mivel a főegyüttható pozitív (1), a függvénynek **minimum**a van.

A minimum helye $x = 2$, értéke pedig $y = -9$.

A csúcspont koordinátái: $V(2; -9)$.

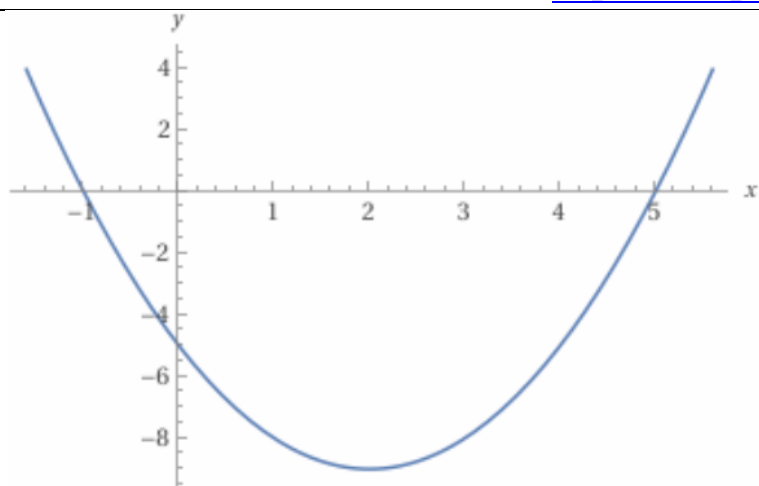
c)

Az ábrázoláshoz már minden fontos pontunk megvan:

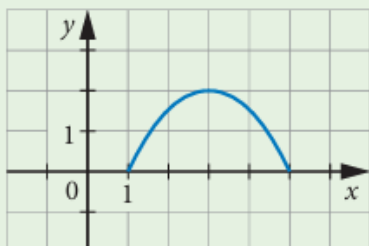
- Zérushelyek:** $(-1; 0)$ és $(5; 0)$
- Tengelymetszet** (y -tengely): Ha $x=0$, akkor $y=-5$, tehát a $(0; -5)$ pont.
- Csúcspont** (minimum): $(2; -9)$

Az ábrázolás lépései:

- Vedd fel a koordináta-rendszert.
- Jelöld be a két pontot az x -tengelyen (-1 és 5).
- Jelöld be a mélypontot a $(2; -9)$ koordinátánál.
- Kösd össze őket egy sima, íves vonallal (ne feledd, a parabola alja "kerekített", nem hegyes!).



- 4** Egy építész mérnök számítógépes ábrát készít egy homlokzat díszítéséről. A homlokzatot egy parabolaív alakú résszel szeretné érdekesebbé tenni. A tervrajzon a parabolaív két legalsó pontja a koordináta-rendszer x tengelyén helyezkedik el, az egyik az $(1; 0)$, a másik az $(5; 0)$ pontban.



Írj fel olyan másodfokú függvényt a valós számok halmazán,

- melynek zérushelyei 1 és 5;
- melynek zérushelyei 1 és 5, és grafikonja lefelé nyílik;
- melynek zérushelyei 1 és 5, továbbá a 3 helyen a helyettesítési értéke 2.

Megoldás:

a)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0,$$

ahol a : főegyüttható, x_1 és x_2 az egyenlet gyökei (más néven zérushelyek)

- Gyöktényezős alak:

$$a = 1; x_1 = 1; x_2 = 5$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 5) = (x - 1) \cdot (x - 5) = 0$$

- Kifejtve: $x^2 - 5x - x + 5 = 0$

- Egyenlet: $x^2 - 6x + 5 = 0$

b) Ahhoz, hogy a parabola lefelé nyíljon, a főegyütthatónak (a) negatívnak kell lennie; legyen pl. $a = -1$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0,$$

ahol a : főegyüttható, x_1 és x_2 az egyenlet gyökei (más néven zérushelyek)

- Gyöktényezős alak:

$$a = -1; x_1 = 1; x_2 = 5$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = -1 \cdot (x - 1) \cdot (x - 5) = -(x - 1) \cdot (x - 5) = 0$$

- Kifejtve: $-(x^2 - 5x - x + 5) = 0$

- Egyenlet: $-x^2 + 6x - 5 = 0$

c)

Itt már pontosan meg kell határoznunk az a értékét. Tudjuk, hogy $f(3) = 2$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

$$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

ahol a : főegyüttható, x_1 és x_2 az egyenlet gyökei (más néven zérushelyek)

- Gyöktényezős alak:

$$x_1 = 1; x_2 = 5$$

$$f(x) = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 5) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 5)$$

- Helyettesítsük be a megadott pontot, és ebből számoljuk ki a főegyütthatót:

$$x = 3; f(x) = 2$$

$$f(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 5)$$

$$2 = a \cdot (3 - 1) \cdot (3 - 5) = a \cdot 2 \cdot (-2) = -4a$$

Osztvá -4-gyel:

$$a = \frac{2}{-4} = -0,5$$

- Így a keresett függvény:

$$f(x) = a \cdot (x - 1) \cdot (x - 5)$$

$$f(x) = -0,5 \cdot (x - 1) \cdot (x - 5) = -0,5 \cdot (x^2 - 5x - x + 5) = -0,5 \cdot (x^2 - 6x + 5)$$

$$f(x) = -0,5x^2 + 3x - 2,5$$

5 Egy egyenlet gyökei a valós számok halmazán $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{5}$.

- a) Írj fel egy ilyen egyenletet!
- b) Az egyenlet gyökei nem változnak meg, ha az egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk egy 0-tól különböző valós számmal. Ennek segítségével írd fel olyan egyenletet, melynek gyökei $\frac{1}{2}$ és $\frac{3}{5}$, együtthatói pedig egész számok!

Megoldás:

a)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0,$$

ahol a: főegyüttható, x_1 és x_2 az egyenlet gyökei (más néven zérushelyek)

- Gyöktényezős alak:

$$a = 1; x_1 = 1/2; x_2 = 3/5$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{5}\right) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{3}{5}\right) = 0$$

- Kifejtve: $x^2 - \frac{3}{5}x - \frac{1}{2}x + \frac{3}{10} = 0$

- Egyenlet:

$$x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{3}{10} = 0$$

b)

- Vegyük az előző egyenletet:

$$x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{3}{10} = 0$$

- Szorozzuk meg mindkét oldalt 10-zel:

$$10 \cdot \left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{3}{10}\right) = 0$$

- Eredmény:

$$10x^2 - 11x + 3 = 0$$

6 Adj meg olyan egész együtthatós, másodfokú egyenletet, melynek gyökei

a) $\frac{1}{3}$ és $-\frac{1}{4}$;

b) $\frac{2}{7}$ és $-\frac{4}{9}$.

Megoldás:

a)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0,$$

ahol a : főegyüttható, x_1 és x_2 az egyenlet gyökei (más néven zérushelyek)

- Gyöktényezős alak:

$$a = 1; x_1 = 1/3; x_2 = -1/4$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 1 \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{4}\right)\right) = \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

- Kifejtve:

$$x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{12} = 0$$

- Egyenlet:

$$x^2 - \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} = 0$$

Szorozzuk meg 12-vel, hogy ne legyen tört:

$$12x^2 - x - 1 = 0$$

b)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0,$$

ahol a : főegyüttható, x_1 és x_2 az egyenlet gyökei (más néven zérushelyek)

- Gyöktényezős alak:

$$a = 1; x_1 = 2/7; x_2 = -4/9$$

$$a(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 1 \cdot \left(x - \frac{2}{7}\right) \cdot \left(x - \left(-\frac{4}{9}\right)\right) = \left(x - \frac{2}{7}\right) \cdot \left(x + \frac{4}{9}\right) = 0$$

- Kifejtve:

$$x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{2}{7}x - \frac{4}{63} = 0$$

- Egyenlet:

$$x^2 - \frac{10}{63}x - \frac{8}{63} = 0$$

Szorozzuk meg 63-mal, hogy ne legyen tört:

$$63x^2 - 10x - 8 = 0$$